

Олимпиадная работа
муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников

по математике

учащегося 10 класса

муниципального автономного общеобразовательного учреждения
«Образовательный комплекс «Лицей №3» имени С.П. Угаровой»
Старооскольского городского округа

Ярченко Руслана Алексеевича
(ФИО полностью)

Педагоги-наставники:

учитель математики

МАОУ «ОК «Лицей №3» имени С.П. Угаровой»
(наименование ОУ)

Белая Ирина Вячеславна
(ФИО полностью)

учитель математики

МАОУ «ОК «Лицей №3» имени С.П. Угаровой»
(наименование ОУ)

Демидишина Галина Алексеевна
(ФИО полностью)

Задача №3

10-38

$$(x^2 + 10x + q)(x^2 + 10x + q + 18) = 0$$

$$x^2 + 10x + q = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + 10x + q + 18 = 0$$

$$D = 100 - 4q =$$

$$D = 100 - 4q - 18 \cdot 4 = 4(25 - q - 18) = 4(7 - q)$$

$$= 4(25 - q)$$

$$x_1 = \frac{-10 - 2\sqrt{25 - q}}{2}$$

$$x_3 = \frac{-10 - 2\sqrt{7 - q}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-10 + 2\sqrt{25 - q}}{2}$$

$$x_4 = \frac{-10 + 2\sqrt{7 - q}}{2}$$

Сравним

$$x_1 \text{ и } x_3, \text{ т.е. } -5 - \sqrt{25 - q} \text{ и } -5 - \sqrt{7 - q},$$

$25 - q > 7 - q$; $q - 25 < q - 7$; $q - 18 < q$. Значит $q - 25 < q - 7$, тогда следовательно $\sqrt{25 - q} > \sqrt{7 - q}$, тогда $-\sqrt{25 - q} < -\sqrt{7 - q}$, значит $-5 - \sqrt{25 - q} < -5 - \sqrt{7 - q}$. Значит $x_1 < x_3$.

Сравним теперь x_2 и x_4 , т.е. $-5 + \sqrt{25 - q}$ и $-5 + \sqrt{7 - q}$.

Т.к. мы определили, что $\sqrt{25 - q} > \sqrt{7 - q}$, значит $-5 + \sqrt{25 - q} > -5 + \sqrt{7 - q}$, тогда $x_2 > x_4$. Из всего этого следует, что $x_1 < x_3$ и $x_2 > x_4$. Очевидно, что $x_4 > x_3$ ($\sqrt{7 - q} > -\sqrt{7 - q}$), значит $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$.

По т-ме Виета из 1-ого ур-ия следует, что $\begin{cases} x_1 + x_2 = -10 \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$

а из 2-ого ур-ия $\begin{cases} x_3 + x_4 = -10 \\ x_3 \cdot x_4 = q + 18 \end{cases}$

Т.к. корни ур-ий составляют арифм. прогрессию, где x_1 - первый член, то $x_1 = x_1$, $x_3 = x_1 + d$, $x_4 = x_1 + 2d$, $x_2 = x_1 + 3d$.

Подставим соответствующие значения в ур-ия. Получается

$$\begin{cases} 2x_1 + 3d = -10 \\ x_1(x_1 + 3d) = q \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3d = -10 \\ (x_1 + d)(x_1 + 2d) = q + 18 \end{cases}$$

Из 1-ой системы видно, что $q = x_1^2 + 3dx_1$, а из 2-ой системы

$$q = x_1^2 + 3dx_1 + 2d^2 - 18. \text{ Т.к. } q = q, \text{ то } x_1^2 + 3dx_1 = x_1^2 + 3dx_1 + 2d^2 - 18, \text{ откуда } 2d^2 - 18 = 0; 2d^2 = 18; d^2 = 9 \text{ и тогда } d = \pm 3$$

Задание №3 (продолжение)

10-38

Подставим оба значения d в ур-ие $2x_1 + 3d = -10$

$$\begin{cases} 2x_1 + 9 = -10 \\ 2x_1 - 9 = -10 \end{cases} \begin{cases} x_1 = -9,5 \\ x_1 = -0,5 \end{cases}$$

При $d = 3$: $x_1 = -9,5$; $x_3 = -6,5$;

$x_4 = -3,5$ и $x_2 = -0,5$. $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$ - условие выполнено

При $d = -3$: $x_1 = -0,5$, $x_3 = -3,5$, $x_4 = -6,5$, $x_2 = -9,5$,

$x_1 > x_3 > x_4 > x_2$ - противоречие. Значит $x_1 = -9,5$.

Ответ: $x_1 = -9,5$

Задание №2

Пусть x км - проехал Алексей за $\frac{1}{2}$ ч. Значит

его скорость равна $2x$ км/ч. $(x+6)$ км - проехал Василий за $\frac{1}{2}$ ч., значит скорость Василия равна $2(x+6)$ км/ч.

Всё расстояние Алексея равно $(x + \frac{2x \cdot x}{60})$ км, а

расстояние Василия равно $(x+6 + \frac{2(x+6)(x+6)}{60})$ км. Т.к.

по окончании заездов Василий проехал на 11 км больше Алексея, то составлю и решу ур-ие:

$$x + \frac{2x^2}{60} + 11 = x + 6 + \frac{2(x+6)^2}{60}; \quad 5 = \frac{x^2 + 12x + 36 - x^2}{30} \quad | \cdot 30$$

$$11 - 6 = \frac{(x+6)^2}{30} - \frac{x^2}{30};$$

$$12x + 36 = 150$$

$$12x = 114$$

$$x = \frac{114}{12} = 9 \frac{3}{4} = 9 \frac{1}{2} = \frac{19}{2}$$

Скорость Василия равна $2x + 12 = 19 + 12 = 31$ (км/ч)

Скорость Алексея равна $2x = 19$ км/ч.

Ответ: 31 км/ч и 19 км/ч.

Аб.

№5

Пусть Артём выписал все произведения (которые даны по условию). Тогда всего таких произведений 15.

Задание №5 (продолжение)

10-38

$$a_1 a_2 a_3 = 1$$

$$a_2 a_3 a_4 = 2$$

...

$$a_{13} a_{14} a_{15} = 25$$

Значит $a_1 a_2 a_3 < a_2 a_3 a_4 < \dots < a_{13} a_{14} a_{15}$.

$$a_1 a_2 a_3 < a_2 a_3 a_4 \quad a_3 a_4 a_5 < a_4 a_5 a_6 \dots$$

$$a_1 < a_4;$$

$$a_3 < a_6 \dots$$

$$a_{12} a_{13} a_{14} < a_{13} a_{14} a_{15}$$

$$a_{12} < a_{15}$$

Т.е. $a_n < a_{n+3}$, следовательно член

$$a_1 a_{14} a_{15} < a_{13} a_{14} a_{15}, \text{ т.к. } a_1 < a_{13} \quad (a_1 < a_4 < a_7 < a_{10} < a_{13})$$

$$a_1 a_{15} a_{14} \vee a_{12} a_{13} a_{14}; \quad a_1 a_{15} \vee a_{12} a_{13} \quad a_{15} > a_{12}; \quad a_{13} > a_1$$

Значит может получиться так, что $a_1 a_{15} = a_{12} a_{13}$, тогда

$$a_1 a_{15} a_{14} = a_{12} a_{13} a_{14} = 23$$

$$a_1 a_{15} a_{14} \vee a_{15} a_1 a_2; \quad a_{14} \nabla a_2 \quad (a_2 < a_5 < a_8 < a_{11} < a_{14}) \text{ значит}$$

$$a_1 a_{15} a_{14} > a_{15} a_1 a_2. \text{ Значит } a_{15} a_1 a_2 < a_{12} a_{13} a_{14}$$

$a_{15} a_1 a_2 \vee a_{11} a_{12} a_{13}$. $a_{15} > a_{12}$, $a_1 < a_{13}$, $a_2 < a_{11}$, ~~значит~~ Значит $a_{15} a_1 a_2$ может равняться $a_{11} a_{12} a_{13}$, т.е. $a_1 a_2 a_{15} = 21 = 2k+1$. Откуда следует, что $k=10$. — это будет наибольшим его значением

Ответ: $k=10$

№	Баллы	Подпись	РПО
1	0		Корникова Н.А.
2	7		Серовская Н.А.
3	6		Бейлик Ю.В.
4	0		Кобарева Н.В.
5	0		Исеев И.И.
6	0		Михайлова А.А.
7	0		Потемкина Т.И.
8	0		Смирнов С.А.
итого	13		

